التكامل كعملية عكسية للتفاضل :

١) إذا كانت قَ(س) = د(س) فإننا نسمي الدالة د(س) مشتقة ق(س) ، ونسمي الدالة ق(س) دالة مقابلة للدالة د(س) .

٢) إذا كانت ق(س) دالة مقابلة للدالة د(س) في فترة ما، فإن : ق(س) + جـ هي مجموعة الدوال المقابلة للدالة د(س) في نفس الفترة .

إذا كانت قَ(س) = ٦س^{٥} ، فما ق(س) ؟

الحل

$$ق(س) = \frac{٦س^{٦}}{٦} + ث$$

$$= س^{٦} + ث$$

أ) اكتب دالتين مقابلتين للدالة د(س) = ٥س^{٣} + ٦

ب) تحقق من أن ق(س) = $\sqrt{١ + س^{٤}}$

دالة مقابلة للدالة : د(س) = $\frac{٢س^{٣}}{\sqrt{١ + س^{٤}}}$

الحل

أ) ١) $\frac{٥}{٤}$ س^{٤} + ٦س + ١

٢) $\frac{٥}{٤}$ س^{٤} + ٦س + ١٠

ب) ق(س) تكون دالة مقابلة للدالة د(س)

إذا كان :

قَ(س) = د(س)

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ (١ + س٤)$^{-\frac{١}{٢}}$ × ٤س^{٣}

$$= \frac{٢س^{٣}}{\sqrt{١ + س^{٤}}}$$

= د(س) .

نتيجة:

١) إذا كانت د(س) = ٠ لجميع قيم س الحقيقية أو أية مجموعة جزئية منها فإن الدالة : ق(س) = ث ، حيث ث ثابت هي الدالة المقابلة للدالة د(س) في تلك الفترة .

٢) إذا كانت كل من ق(س) ، هـ(س) دالتين مقابلتين للدالة د(س) في فترة ما فإن : ق(س) = هـ(س) + ث ، حيث ث ثابت لكل س تنتمي للفترة نفسها .

ملاحظات حول الدالة المقابلة :

١) يوجد للدالة أكثر من دالة مقابلة.

٢) الفرق بين أي دالتين مقابلتين= مقدارًا ثابتًا .

٣) مشتقة الدالة المقابلة = الدالة الأصلية.

التكامل:

عرفنا أن مجموعة الدوال المقابلة للدالة د(س) على فترة معينة تعطى بالقاعدة ق(س) + ث حيث ث ثابت ، إن هذا التعبير يسمى أيضًا التكامل للدالة د(س) وسنستخدم لفظ التكامل بدلاً من الدالة المقابلة العامة ونرمز لذلك بالرمز :

$\int$ د(س) . ؏ س = ق(س) + ث ، ويقرأ : تكامل الدالة د(س) بالنسبة إلى س يساوي ق(س) + ث ، حيث :

$\int$ رمز التكامل، د(س) الدالة المكاملة ، ؏ س متغير التكامل. وتسمى عملية إيجاد ق(س) + ث التي تحقق :

$\int$ د(س) ؏س = ق(س) + ث عملية التكامل وفي الواقع فإن التكامل يعني إيجاد الدوال المقابلة للدالة المعطاة، وعليه فإن $\int$ ق(س) . ؏س = ق(س) + ث .

$\frac{ء}{ء س}$. ق(س) ؏ س = $\frac{ء}{ء س}$ $\int$ ق(س) ؏ س

= ق(س)

إذا كان ص = $\int$ $\frac{٥س}{س^{٢} + ١}$. ؏ س

فأوجد صَ ومن ثم أوجد صَ (١) .

الحل :

صَ = $\frac{٥س}{س^{٢} + ١}$

صَ(١) = $\frac{٥}{٢}$

أوجد الدالة المقابلة للدالة :

د(س) = ٣س^{٢} + س − ٤

تحقق من صحة :

$\int$ ص $\sqrt{١ + ص^{٢}}$. ؏ ص = $\frac{١}{٣}$ (١ + ص^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

الحل

$\frac{ء}{ء س}$ $\frac{١}{٣}$ (١ + ص^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث)

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٣}{٢}$ (١ + ص^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ × ٢ص

= $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{١ + ص^{٢}}$ × ٢ص

= ص $\sqrt{١ + ص^{٢}}$

تحقق مما يلي (حيث ن ≠ -١):

أ) $\int س^{ن} \cdot ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$.

ب) $\int (أ س^{ن} + ب) ء س = \frac{أ س^{ن+١}}{ن+١} + ب س + ث$.

الحل:

أ) $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث\right) =$

$\frac{(ن+١) س^{ن+١-١}}{(ن+١)} +$ صفر $= س^{ن}$

ب) يعامل مثل جزئية (أ) .

أوجد ناتج :

$\int ٥ \sqrt[٣]{س^{٢}}\, ء س$

الحل :

$\int ٥ \sqrt[٣]{س^{٢}}\, ء س = ٥ \int س^{\frac{٢}{٣}}\, ء س$

$= ٣ س^{\frac{٥}{٣}} + ث$

أوجد ناتج : $\int \frac{٣}{س^{٤}} \cdot ء س$

نتجة:

١) $\int أ \cdot ء س = أ س + ث ،\ أ \ni ح$

٢) $\int س^{ن} \cdot ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث ،\ ن \neq -١$

٣) $\int أ ق(س) \cdot ء س = أ \int ق(س) \cdot ء س ،\ أ \ni ح$

٤) $\int (ق(س) \pm هـ(س)) \cdot ء س = \int ق(س) \cdot ء س \pm \int هـ(س) \cdot ء س$

إذا كانت قَ(س) = ٦س٢ + ٤س ، وكان ق(١) = ٧ فأوجد ق(٢) .

الحل :

ق(س) = $\int$ قَ(س) ء س = $\int$ (٦س٢ + ٤س) . ء س

= ٢س٣ + ٢س٢ + ث

∵ ق(١) = ٧

∴ ق(١) = ٢(١)٣ + ٢(١)٢ + ث = ٧

∴ ث = ٣

ق(س) = ٢س٣ + ٢س٢ + ٣

ق(٢) = ٢(٢)٣ + ٢(٢)٢ + ٣ = ٢٧ .

أ) أوجد $\int$ (س٣ - ٥س-٢ + ٤س - ٣) . ء س

ب) ما الفرق بين : $\frac{ء}{ء س}\int$ د(س) . ء س ، $\int \frac{ء}{ء س}$ د(س) . ء س ؟

تحقق من صحة إجابتك .

الحل:

أ) $\int$ (س٣ - ٥س-٢ + ٤س - ٣) ء س

= $\frac{١}{٤}$ س٤ + $\frac{٥}{س}$ + ٢س٢ - ٣س + ث

ب) $\frac{ء}{ء س}\left(\int د(س) . ء س\right)$

= $\frac{ء}{ء س}$ (ق(س) + جـ) = د(س) ،

$\int \left(\frac{ء}{ء س} د(س)\right) . ء س$ = د(س) + ث

مثال عليه : إذا كانت د(س) = س٢ + ١

∴ $\frac{ء}{ء س}\int$ (س٢ + ١) ء س

= $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{س^{٣}}{٣} + س + ث\right)$

= س٢ + ١ + صفر

= س٢ + ١

= د(س)

اوجد:

(١٣) $\int \frac{٥(٢س-٣)^{\frac{٤}{٣}}}{\sqrt{١٦س-٢٤}}$. ؤس

الحل:

$$= \int \frac{٥(٢س-٣)^{\frac{٤}{٣}}}{\sqrt{٨(٢س-٣)^{\frac{١}{٢}}}}$$. ؤس

$$= \frac{٥}{\sqrt{٢}\times ٢} \int (٢س-٣)^{\frac{٤}{٣}-\frac{١}{٢}}$$. ؤس

$$= \frac{٥}{\sqrt{٢}\times ٢} \int (٢س-٣)^{\frac{٥}{٦}}$$. ؤس

$$= \frac{١٥}{\sqrt{٢}\times ٢٢} (٢س-٣)^{\frac{١١}{٦}} + ث$$

اوجد:

(١٤) أوجد الدالة ق المقابلة للدالة د(س) = $\frac{س^٣-٨}{س-٢}$ علمًا بأن ق(١) = $\frac{١}{٣}$.

١٤) د(س) = $\frac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{(س-٢)}$

ق(س) = $\frac{س^٣}{٣} + س^٢ + ٤س + ث$.

∴ $\frac{١}{٣} + ١ + ٤ + ث = \frac{١}{٣}$

∴ ث = −٥

∴ ق(س) = $\frac{١}{٣}س^٣ + س^٢ + ٤س - ٥$.

تدريبات للطالب

اوجد التكاملات الاتية:

١) $\int (١ + ٢س)^٢$. ؤس

٢) $-\int \sqrt{٣}$. ؤس

٣) $\int \frac{١}{س^٤}$. ؤس

٤) $\int (٨\sqrt{س^٤} + ٣)$. ؤس

٥) $\int (\frac{٨}{\sqrt{س}} + \frac{٤}{س^٣})$. ؤس

٦) $\int (جا^٢س + جتا^٢س)$. ؤس

٧) جتا $\frac{\pi}{٣}$. ؤس

لاحظ ان :-

جا^{٢}س + جتا^{٢}س و جتا $\frac{\pi}{٣}$ تعتبر مقادير ثابتة

وقيمة الاول = 1 والثاني = 0,5

وتكامل الاول يعطي س + ث .

والثاني يعطي 0,5 س + ث .

١ حل المعادلات التفاضلية الآتية:

أ) $\frac{د ص}{د س} = -١$

ب) $\frac{د ص}{د س} + ٨س - ٧ =$ صفر

جـ) $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص^{-٢}}{س^{٣}}$

د) $\frac{د ص}{د س} = \frac{\sqrt{س}}{٢ص^{٢}}$

١) أ) $\frac{د ص}{د س} = -١$

$\therefore \int د ص = -\int د س$

$\therefore$ ص $= -س + ث$.

ب) $\frac{د ص}{د س} = -٨س + ٧$

$\int د ص = \int (-٨س + ٧) د س$.

$\therefore$ ص $= -٤س^{٢} + ٧س + ث$.

جـ) $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص^{-٢}}{س^{٣}}$

$\therefore \frac{١}{ص^{-٢}} د ص = \frac{١}{س^{٣}} د س$.

$\therefore \int ص^{٢} د ص = \int س^{-٣} د س$

$\therefore \frac{ص^{٣}}{٣} = \frac{س^{-٢}}{-٢} + ث$

$\therefore$ ص$^{٣} = -\frac{٣}{س^{٢}} + ث$

د) $\frac{د ص}{د س} = \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{٢ص^{٢}}$

$\Longleftarrow$ ٢ص^{٢}. د ص $= س^{\frac{١}{٢}} د س$.

$\therefore \frac{٢}{٣} ص^{٣} = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

١٢ عند تفريغ حمام سباحة به كمية معينة من الماء وجد أن معدل تغير حجم الماء في الحمام عند زمن ن دقيقة يتعين بالعلاقة:

$\frac{د ح}{د ن} = ٦(٣ن - ٥٠)$م^{٣}/دقيقة .

إذا علمت أن حجم الماء في الحمام بعد مرور ١٠ دقائق من بدء التفريغ يساوي ٤٠٠م^{٣} .

أوجد حجم الماء في الحمام عند بدء التفريغ ، واحسب الزمن اللازم حتى يتم التفريغ .

١٢) ح $= \int ٦(٣ن - ٥٠) د ن = ٩ن^{٢} - ٣٠٠ن + ث$

$\Longleftarrow$ ٤٠٠ $= ٩٠٠ - ٣٠٠٠ + ث$ ، $\therefore$ ث $= ٢٥٠٠$

$\therefore$ ح $= ٩ن^{٢} - ٣٠٠ن + ٢٥٠٠$ ، عندما ح $= ٠$ فإن $٩ن^{٢} - ٣٠٠ن + ٢٥٠٠ = ٠$

$\therefore (٣ن - ٥٠)^{٢} = ٠ \Longleftarrow ٣ن = ٥٠ \Longleftarrow$ ن $= \frac{٥٠}{٣}$ دقيقة

أوجد التكاملات التالية :

١) $\int (٣ص^{٢} + \frac{٣}{ص^{٢}} - \sqrt{ص})\, د ص$

٢) $\int س^{٢}(٢س + \frac{١}{س})^{٢}\, د س$

٣) $\int ٣ن^{٢}\, د س$

الحل :

١) $ص^{٣} - \frac{٣}{ص} - \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٢) $\frac{٤}{٥} س^{٥} + \frac{٤}{٣} س^{٣} + س + ث$

٣) $٣ن^{٢} س + ث$

أوجد الدالة المقابلة لكل من الدوال الآتية :

١) $د(س) = ٩س^{٢} + ٤س - ١$

٢) $د(س) = س^{\frac{٥}{٤}}$

٣) $د(س) = (س - \frac{١}{س})^{٢}$

٤) $د(س) = س^{٥} - \sqrt{٢}$

٥) $د(س) = \frac{٣س^{٣} - ٣س^{٢} + ١}{س^{٢}}$

الحل:

١) $٣س^{٣} + ٢س^{٢} - س + ث$

٢) $\frac{٤}{٩} س^{\frac{٩}{٤}} + ث$

٣) $\frac{١}{٣} س^{٣} - ٢س - \frac{١}{س} + ث$

٤) $\frac{١}{٧} س^{٦} - \sqrt{٢}\, س + ث$

٥) $\frac{٣}{٢} س^{٢} - ٣س - س^{-١} + ث$

أوجد :

٦) $\int \frac{٣}{\sqrt{س}}\, د س$

٧) $\int \sqrt{س}\, \sqrt{س}\, د س$

٨) $\int \frac{٨س - ٥}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\, د س$

٩) $\int ١٠\, د س$

١٠) $\int (٦ + س)\sqrt{س}\, د س$

١١) $\int \frac{\sqrt{س}(س - ١)}{\sqrt{س} + ١}\, د س$

١٢) $\int س^{٢}(٧ - \frac{٣}{س})^{٢}\, د س$

١٣) $\int \frac{٥(٢س - ٣)^{\frac{٤}{٣}}}{\sqrt{١٦س - ٢٤}}\, د س$

الحل:

٦) $٦\sqrt{س} + ث$

٧) $\frac{٤}{٧} س^{\frac{٧}{٤}} + ث$

٨) $\frac{٢٤}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} - \frac{١٥}{٢} س^{\frac{٢}{٣}} + ث$

٩) $١٠س + ث$

١٠) $٤س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ث$

١١) $\int \frac{\sqrt{س}(\sqrt{س} + ١)(\sqrt{س} - ١)}{\sqrt{س} + ١}\, د س$

$= \int \sqrt{س}(\sqrt{س} - ١)\, د س$

$= \int (س - \sqrt{س})\, د س$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

١٢) $\int س^{٢}(٧ - \frac{٣}{س})^{٢}\, د س$

$= \int (س(٧ - \frac{٣}{س}))^{٢}\, د س$

$= \int (٧س - ٣)^{٢}\, د س$

$= \frac{١}{٢١}(٧س - ٣)^{٣} + ث$